

Programme de colle n°25

semaine du 27 avril au 1 mai

Notions vues en cours

Chapitre 31 : Matrices et applications linéaires

- **Matrices semblables** : définition, c'est une relation d'équivalence, si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors deux matrices quelconques de f obtenues en prenant des bases différentes au départ et à l'arrivée sont semblables
- Deux matrices semblables sont en particulier équivalentes et ont donc même rang
- **Trace d'une matrice carrée** : définition, linéarité, si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, deux matrices semblables ont même trace
- Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie : on définit la **trace d'un endomorphisme** par $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$, pour un projecteur $p : \text{Tr}(p) = \text{rg } p$

Chapitre 32 : Groupe symétrique

- **Permutation** d'un ensemble E , ensemble $S(E)$, c'est un groupe pour la loi \circ
- **Groupe symétrique** $S_n = S(\llbracket 1, n \rrbracket)$, non abélien si $n \geq 3$, S_n possède $n!$ éléments, point fixe d'une permutation
- Notation exhaustive d'une permutation : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, notation multiplicative $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$, σ^{-1} est l'inverse de σ , on note id l'élément neutre
- **p -cycle** pour $p \geq 2$: définition, notation $\sigma = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ \cdots \ a_p)$, $\sigma^p = \text{id}$, support d'un cycle, deux cycles à supports disjoints commutent, **transposition**
- Toute permutation peut se décomposer en un produit (éventuellement vide pour l'identité) de cycles à supports disjoints, de manière unique à l'ordre près, **orbite** d'une permutation, méthode pratique de la décomposition
- Décomposition d'un cycle (et par suite d'une permutation) en produit de transpositions, cette écriture n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions est invariante d'une décomposition à l'autre, permutation paire / impaire
- **Signature** d'une permutation, notation $\varepsilon(\sigma)$, c'est un morphisme de groupes de (S_n, \circ) dans $(\{-1, 1\}, \times)$, lien avec la parité d'une permutation, la signature d'une transposition vaut -1 , celle d'un p -cycle est $(-1)^{p-1}$

Chapitre 33 : Déterminants

- Application / forme bilinéaire, application symétrique, application / forme n -linéaire : définition, exemples
- Forme n -linéaire alternée : définition, s'annule quand on l'évalue en une famille liée, est inchangée quand on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres
- Forme n -linéaire antisymétrique : définition, formule $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)f(u_1, \dots, u_n)$, une forme n -linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique
- Pour une forme n -linéaire alternée avec une base (e_1, \dots, e_n) de l'espace de départ : expression de $f(u_1, \dots, u_n)$; f est entièrement déterminée par $f(e_1, \dots, e_n)$; si E est de dimension n , l'ensemble des formes n -linéaires alternées sur E est un e.v. de dimension 1

Les exercices porteront majoritairement sur les chapitres 31 et 32.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **29 à 31**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont exigibles. Les énoncés des définitions et théorèmes doivent être clairement... énoncés !*

1. Trace d'une matrice : définition, que peut-on dire de la trace d'une combinaison linéaire de matrices (sans démonstration) ? d'un produit de deux matrices (avec démonstration) ? Si A et B sont semblables, que peut-on dire de leur trace (avec démonstration) ? Chapitre 31, Encadrés 31.38 à 31.41
2. Définition d'une forme n -linéaire alternée, d'une forme n -linéaire antisymétrique. montrer que toute forme n -linéaire alternée est antisymétrique Chapitre 33, Définitions 33.6 et 33.8, Théorème 33.10 (un seul sens)
3. Définition d'une forme n -linéaire alternée, d'une forme n -linéaire antisymétrique. montrer que toute forme n -linéaire antisymétrique est alternée Chapitre 33, Définitions 33.6 et 33.8, Théorème 33.10 (un seul sens)

Questions Flash au programme :

Chapitre 31 : (les notations sont sous-entendues)

- Donner la taille de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Donner la taille de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(f)$ et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Donner la formule qui exprime la matrice de $f(x)$ en fonction des matrices de f et de x . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ les bases de E, F .
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Donner la formule qui exprime la matrice de $g \circ f$ en fonction des matrices de f et de g . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ les bases de E, F, G .
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Donner la formule qui exprime la matrice de f^{-1} en fonction de la matrice de f . On appellera $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ les bases de E, F .
- Donner la taille de la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' et expliquer ce que représente chaque coefficient de cette matrice.
- Donner la formule de changement de bases qui donne $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$.
- Donner la formule de changement de bases qui donne $\text{Mat}_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ en fonction de $\text{Mat}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Donner l'ensemble de départ, d'arrivée et l'expression du morphisme f_A canoniquement associé à A .
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont semblables, que peut-on dire de leurs traces ? Est-ce une équivalence ?
- Que peut-on dire de la trace de $A + B$? et de la trace de AB ?

Chapitre 30 : (on suppose que E et F sont des \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$)

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G . Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(u)$ pour $u \in E$?

- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G . Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p .
- Compléter ces phrases : “Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ...” et “Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ...”
- Soit s une symétrie par rapport à un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G . Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $s(u)$ pour $u \in E$?
- Soit E un \mathbb{K} -e.v. Que signifie l’assertion “ f est une forme linéaire sur E ” ?
- Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Que signifie “ (e_1^*, \dots, e_n^*) est une base duale de (e_1, \dots, e_n) ” ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E , si E est de dimension quelconque ?
- Que doit vérifier H pour être un hyperplan de E , si E est de dimension n ? Quelle est la dimension de E^* ?
- Soit $H_1 = \text{Ker } \varphi_1$ et $H_2 = \text{Ker } \varphi_2$ sont deux hyperplans, à quelle condition sur φ_1 et φ_2 a-t-on $H_1 = H_2$?
- Soit E un \mathbb{K} -e.v. Donner une caractérisation de l’assertion “ H est un hyperplan” qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 29 : (on suppose que E et F sont des \mathbb{K} -e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$)

- Compléter : une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire si :
- Donner les définitions ensemblistes de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$.
- À quelles conditions sur $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ est-ce que f est injective ? surjective ?
- Comment trouver une famille génératrice de $\text{Im } f$ à partir d’une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ?
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Si E et F sont de même dimension finie, que peut-on dire si f est injective ?
- Que signifie que E et F sont des espaces isomorphes ? Si $\dim E = n$, quels sont les espaces isomorphes à E ?
- Soit u_1, \dots, u_n des vecteurs de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\text{rg}(u_1, \dots, u_n)$? de $\text{rg } f$?
- Si E est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Si F est de dimension finie, que peut-on dire sur le rang de f ? On attend deux propriétés.
- Que peut-on dire du rang de $g \circ f$ en fonction des rangs de f et de g ?
- Énoncer le théorème du rang.